

23.05.2014

Freie Universität Berlin

- Fachbereich Physik –

Isentropenindex

Protokoll zum Versuch des physikalischen Grundpraktikums I

Teilnehmer:

Ludwig Schuster, ludwig.schuster@fu-berlin.de

Florian Conrad, florianc@zedat.fu-berlin.de

Tutor:

Kenichi Ataka

Praktikumsleiterin:

Dr. Beate Schattat

Einführung	2
Physikalische Grundlagen	2
Aufgaben:	4
Messprotokoll:	5
Methode nach Flammersfeld- Rüchert.....	5
Methode nach Clement Desormes	7
Auswertung	7
Clement-Desormes	7
Flammersfeld-Rüchert	7
Fehlerbetrachtung:	8
Diskussion	8
Versuch 2: Flammersfeld- Rüchert	8

Einführung

Physikalische Grundlagen

Isentrope Prozesse nennt man solche Prozesse, die ohne Energieaustausch mit der Umgebung und ohne Entropieerzeugung verlaufen. Die Energie des betrachteten Systems bleibt damit also konstant und die Zustandsänderungen sind adiabatisch und reversibel.

Betrachtet man ein ideale Gase, so lassen sich diese Prozesse durch die **Poisson-Gleichungen** beschreiben, von denen eine besagt, dass $P \cdot V^\kappa = \text{const.}$ Dabei wird mit κ (**Kappa**) der **Isotropenindex** bezeichnet.

Es gilt :

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{Gleichung 1})$$

κ ist also abhängig von der spezifischen Wärme bei konstantem Druck (c_p) und der bei konstantem Volumen (c_v). Die spezifische Wärme eines idealen Gases gibt an, wie sich die innere Energie des Gases bei Änderung der Temperatur ändert.

Es gilt :

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (\text{Gleichung 2})$$

Da dieser Wert natürlich mengenabhängig ist, besitzt jeder Stoff eine spezifische Wärmekapazität c (Stoffmenge wird als Masse angegeben) und eine molare Wärmekapazität c_m (Stoffmenge wird in Mol angegeben) . Nach der kinetischen Gastheorie hängen c bzw. c_m κ mit der Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Gases zusammen. Dabei gilt für adiabatisch Volumenänderungen idealer Gase mit Teilchen mit f Freiheitsgraden:

$$dU = \delta W = -PdV = \frac{f}{2} R dT = -R \frac{dV}{V} \Leftrightarrow \frac{dV}{V} = \frac{f}{2} \frac{dT}{T}. \quad (\text{Gleichung 3})$$

Daraus wiederum ergibt sich:

$$\ln V = \ln(T^{-\frac{f}{2}}) + c \quad \text{und} \quad \text{daraus} \quad VT^{\frac{f}{2}} = \text{const.} \quad (\text{Gleichung 4})$$

$$\Rightarrow PV^{\frac{f+2}{f}} = \text{const} = PV^\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{f+2}{f}. \quad (\text{Gleichung 5})$$

Eine Methode zur Bestimmung des Isotropenindex bietet die von Clement-Desormes, dabei wird das Gas selbst als Thermometersubstanz für die Messung der Temperaturdifferenzen verwendet. Dabei wird dann zuerst eine adiabate Zustandsänderung von $(P_1, T_1=T_A)$ nach $(P_2 = P_A, T_2)$ (mit $p_1 > p_A$ und $T_A =$ Raumtemperatur). Danach wird die Zustandsänderung $(P_3, T_3=T_A)$ betrachtet, welche isochor, d.h. bei konstantem Volumen, abläuft. Diese Messung wird möglich, indem man das Gas in einem Gefäß einschließt, in dem in kurzer Zeit nur ein minimaler Wärmeaustausch mit den Wänden stattfindet, bei langen Zeiten aber ein Temperatúrausgleich auftritt.

Man beginnt den Versuch mit einem leichten Überdruck im Gefäß. Sobald das Gas T_A erreicht hat, wird ein kurzer Umgebungskontakt hergestellt, so dass das Gas Außendruck annimmt (adiabatischer Prozeß). **Also gilt $P_A = P_2$.** Nach der kinetischen Gastheorie verringert das Gas dabei seine Innere Energie und Temperatur (ΔT kann mit der Poisson-Gleichung berechnet werden). Da in unserem Fall die Differenzen der Meßgrößen klein gegen die Gesamtmengen sind, läßt sich mit $dP \approx \Delta P$ die Messgleichung relativ leicht herleiten. Bildet man das vollständige Differential der benutzten Poisson-Gleichung $p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const.}$ so erhält man:

$$(1-\kappa) \frac{dP_{(a)}}{P} + \kappa \frac{dT_{(a)}}{T} = 0. \quad (\text{Gleichung 6})$$

Für isochore Zustandsänderungen erhält man bei gleichem Vorgehen aus

$$\frac{P}{T} = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{dP_{(i)}}{T} - P \frac{dT_{(i)}}{T^2} \quad \text{mit} \quad T_{(i)} = -dT_{(a)}:$$

$$(1-\kappa) \frac{dP_{(a)}}{P} - \kappa \frac{dP_{(i)}}{P} = 0. \quad (\text{Gleichung 7})$$

Daraus wiederum ergibt sich :

$$\kappa = \frac{dP_{(a)}}{dP_{(a)} + dP_{(i)}} \approx \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_3} \quad (\text{Gleichung 8})$$

wobei Δh_1 und Δh_3 die Höhendifferenzen bei Anfangszustand 1 und Endzustand 3 sind. Allerdings bleibt zum Abschluß zu bemerken, dass diese Meßmethode leider sehr ungenau ist.

Genauer ist die Methode nach Flammersfeld-Rüchert. Dabei schwingt ein beweglicher Kolben in einem abgeschlossenen Führungsrohr auf einem Gasvolumen V . Da die Schwingung schnell wieder abklingt, wird der Aufbau so modifiziert, dass eine

parametrische Selbststeuerung erreicht wird. Dies gelingt, indem man in Höhe der Mittellage des Kolbens einen konstanten schwachen Gasstrom einleitet und so sowohl erstens Undichtigkeiten im Aufbau ausgleicht, als auch zweitens die Reibung zwischen Kolben und Rohrwand durch die sich bildende Gasschicht minimiert. Obwohl dies die Bewegung theoretisch recht komplex werden läßt, zeigen sich real gesehen nur vernachlässigbare Einflüsse auf das Experiment. Die ein Maß für κ darstellende Eigenfrequenz der Schwingung läßt sich wie folgt herleiten:

Durch Differentiation ergibt sich aus $P \cdot V^\kappa = \text{const.}$:

$$\frac{dP}{P} + \kappa \frac{dV}{V} = 0 \quad (\text{Gleichung 9})$$

wobei V und P Volumen und Druck des Gasvolumens darstellen. Nimmt man nun die Kraft und Auslenkung in Bezug auf den Ruhepunkt auf den Kolben als dF und dx an, sowie A als Querschnittsfläche des Kolbens und m als dessen Masse, so ergibt sich als "Feder"konstante:

$$D = -\frac{dF}{dx} = -\frac{AdP}{dx} = \kappa \frac{PA^2}{V} \quad (\text{Gleichung 10})$$

Daraus ergibt sich nach $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\kappa \frac{PS^2}{mV}}$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ (mit Periodendauer τ)

$$\kappa = \frac{4\pi^2 mV}{\tau^2 PS^2} \quad (\text{Gleichung 11})$$

Aufgaben:

1) Bestimmung des Verhältnisses $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ der spezifischen Wärmen für Luft nach der

Methode von Clement-Desormes.

2) Bestimmung des Wertes von κ für Argon (eiatomig), Stickstoff (N_2 , zweiatomig) und CO_2 (dreiatomig) durch Messung der Eigenfrequenzen eines Gasoszillators. Vergleich der Ergebnisse untereinander und mit den erwarteten Werten aus der kinetischen Gastheorie für ein ideales Gas.

Messprotokoll:

Raumdruck: 1006 mbar \pm 3 mbar

	N2	CO2	Argon	
Apparatur	1	2	3	
Arbeitsvolumen /cm ³	1145	1147	1142	\pm 3 cm ³
Kolbenmasse/g	4,58	4,50	4,52	\pm 0,01 g
Kolbendurchmesser/mm	11,90	11,90	11,90	\pm 0,03 mm

Tabelle 0: Übersicht der Gasapparaturen und deren Fehler.

Methode nach Flammersfeld- Röchert

Fehler Zeitmessung: \pm 0,2 s

Gas	Σ vibrations	Time t [sec.]	∂t
co2	100	00:36,03	00:36,03
	200	01:11,08	00:35,05
	300	01:47,70	00:36,62
	400	02:23,60	00:35,90
	500	02:59,06	00:35,46
	600	03:35,40	00:36,34
	700	04:11,06	00:35,66
	800	04:47,40	00:36,34
	900	05:23,04	00:35,64
	1000	05:59,02	00:35,98

Tabelle 1: Messdaten für CO2

Gas	Σ vibrations	Time t [sec.]	∂t
N2	100	00:34,40	00:34,40
	200	01:08,60	00:34,20
	300	01:42,40	00:33,80
	400	02:16,70	00:34,30
	500	02:50,80	00:34,10
	600	03:24,90	00:34,10
	700	03:58,90	00:34,00
	800	04:32,90	00:34,00
	900	05:07,06	00:34,16
	1000	05:41,18	00:34,12

Tabelle 2: Messdaten für N₂

Gas	Σ vibrations	Time t [sec.]	∂t
Argon	100	00:32,70	00:32,70
	200	01:05,40	00:32,70
	300	01:38,20	00:32,80
	400	02:10,70	00:32,50
	500	02:43,10	00:32,40
	600	03:15,50	00:32,40
	700	03:48,30	00:32,80
	800	04:21,10	00:32,80
	900	04:53,30	00:32,20
	1000	05:26,03	00:32,73

Tabelle 3: Messdaten für Argon

h_0	h_1	h_2	h_{12}	Δh_1	h_3	Δh_3	h_1-h_3	$\Delta h_1+\Delta h_3$	k	∂k	Δk	Δk_2
26	42	30	16	1,41	4	1,41	12	2	3,50	20,00	70,00	4900,00
26	43	30	17	1,41	4	1,41	13	2	3,31	21,40	70,79	5010,90
25	45	30	20	1,41	5	1,41	15	2	3,00	25,00	75,00	5625,00
25	43	30	18	1,41	5	1,41	13	2	3,31	22,20	73,44	5393,83
25	42	29	17	1,41	4	1,41	13	2	3,23	21,40	69,14	4780,54
26	46	30	20	1,41	4	1,41	16	2	2,88	25,61	73,64	5422,25
26	60	32	34	1,41	6	1,41	28	2	2,14	44,05	94,38	8908,16
26	45	30	19	1,41	4	1,41	15	2	3,00	24,21	72,62	5274,00
25	46	30	21	1,41	5	1,41	16	2	2,88	26,40	75,90	5761,14
25	45	30	20	1,41	5	1,41	15	2	3,00	25,00	75,00	5625,00

Tabelle 4: Messdaten für Versuch 1 – Clement Desormes

Methodenach Clement Desormes

Das Prinzip beruht auf der Druckmessung vor und nach einer adiabatischen Expansion. In einem Glasbehälter mit Volumen V_0 wird mit einem Blasebalg zunächst ein (geringer) Überdruck ∂p gegen den Luftdruck b erzeugt. Nach thermischem Ausgleich auf T_0 (Zimmertemperatur), bei dem die Kompressionswärme an die Umgebung abgegeben wird, bestimmt man den verbleibenden Überdruck ∂p , der mit dem U-Rohr Manometer gemessen wird. Dann haben wir $p_{gas} = b + \partial p$. Nun wird ein Entlüftungsventil kurzzeitig geöffnet und das Gas expandiert gegen den Außendruck. Dies kostet innere Energie und die Temperatur des Gases sinkt. Nach dem Druckausgleich haben wir wieder das Volumen V_0 . Durch Wärmeaustausch mit der Umgebung steigt die Temperatur und damit auch der Druck (isochor) um ∂p_2 wieder an.

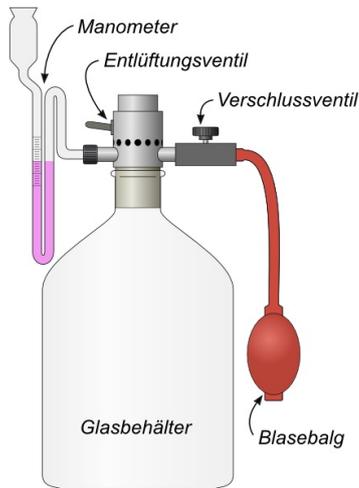


Abbildung 1 Versuchsaufbau zur Adiabatenexponentmessung nach Clement-Desormes

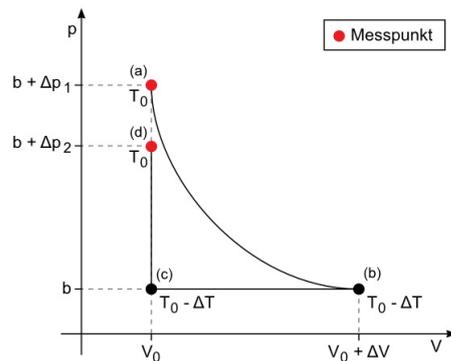


Abbildung 2 Zustandsänderung in der Adiabatenexponentmessung nach Clement-Desormes

Durch schnelle Erwärmung ist die Wärmekapazität des Glasgefäßes zu vernachlässigen. p wird mit einem Manometer gemessen. Untersucht werden die adiabaten Zustandsänderungen. $p_1, T_1 = T_A$ mit $p_1 > p_A$; $T_A =$ Raumtemperatur; $p_2 = p_A, T_2$ und $(p_3 = p_A, T_3)_V$

- das Gas hat Überdruck, Temperaturausgleich findet statt $p_1, T_1 = T_A$; $p_1 > p_A$
- dann kann sich der Druck angleichen da ein Ventil kurzzeitig geöffnet wird. Die Temperatur sinkt beim ausdehnen. $p_2 = p_A, T_2$ Die Abnahme von T kann aus der Poissongleichung berechnet werden.
- Erwärmung des Gases auf $T_A, V = const.$ Berechnung von K aus den Steighöhen am Manometer.

$$K = \frac{\partial p_A}{\partial p_a + \partial p_1} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_3}$$

Auswertung

Clement-Desormes

Luft ist ein 2 atomiges Gasgemisch aus N_2 und O_2 . Es ergeben sich als Freiheitsgrade die 3 Raumrichtungen für 2 Rotationen. $f = 5 \Rightarrow K = \frac{7}{5} = 1,4$ Der Literaturwert für $K_{Luft} = 1,4$ und im Versuch haben wir für $K_{Luft} = 1,30 \pm 0,07$ gemessen, damit ist das Ergebnis verträglich.

Flammersfeld-Rüchert

Es ergeben sich nach $\kappa = \frac{4\pi^2 mV}{\tau^2 PA^2}$, der Gastheorie und den Literaturwerten für die

Isentropenindizes der Gase folgende Werte:

	Aparatur 1 (N ₂)	Aparatur 2 (CO ₂)	Aparatur 3 (Ar)
Isentropenindex κ gemessen:	1,245±0,02	1,117±0,02	1,119±0,02
Freiheitsgrade	5	7	3
Aus kinetischer Gastheorie (gerundet)	1,4000	1,2857	1,6667

Tabelle 5: Ergebnisse Isentropenindizes

Fehlerbetrachtung:

Durch Einsetzen der gegebenen Fehlerangaben und der Zeitfehler beim Messen (Stoppuhr und Zeitstopper) ergibt den Fehler von ±0,02

$$K = 4 * \frac{\pi^2}{\tau^2} * 0,01 * 10^{-3} * \frac{3 * 10^{-3}}{300 * (0,03 * 10^{-3})^2} = \pm 0,02$$

Diskussion

Versuch 2: Flammersfeld- Rüchert

Für alle unsere Isentropenindizes weichen die errechneten Werte signifikant von den Literaturwerten ab. Die Abweichung liegt in keinem Fehlerintervall mehr mit drinnen, somit muss man diesen Teil des Kurstages als fehlgeschlagen bewerten. Obwohl die Messungen problemlos funktionierten, alle Daten vorhanden sind und Fehler beachtet wurden, kommen für die Werte weit abweichende Zahlen heraus.

Bei Stickstoff und Kohlenstoffdioxid könnte das an der Atomanzahl liegen, da mehratomige Gase der kinetischen Gastheorie nicht so gehorchen, wie einatomige Gase. Ebenso sind Rechenfehler nicht auszuschließen. Möglicherweise hat die Lichtschranke zwischendurch nicht gemessen, oder ein Paar Schwingungen doppelt gezählt, was das Ergebnis im Endeffekt verfälscht.

Der Literaturwert der Isentropenindizes wurde durch die Freiheitsgrade bestimmt. Dieser berechnet sich aus $\frac{\text{Anzahl Freiheitsgrade} + 2}{\text{Anzahl Freiheitsgrade}}$.

Argon hat 3 Freiheitsgrade da es ein einatomiges Gas ist, als Wert für den Isentropenindex kommt somit: $\frac{5}{3} = 1,67$

Für CO₂, ein dreiatomiges Gas kommt daher als Wert $9/7 = 1,22$

Für N₂, ein zweiatomiges Gas demnach $7/5 = 1,4$

Wie an der Ergebnistabelle zu sehen, weichen unsere Werte davon signifikant ab. Gründe dafür sind bereits im oberen Teil der Diskussion aufgeführt.