

2.5.2014

Freie Universität Berlin

- Fachbereich Physik –

Kugelfallviskosimeter

Protokoll zum Versuch des physikalischen Grundpraktikums I

Teilnehmer:

Ludwig Schuster, ludwig.schuster@fu-berlin.de

Florian Conrad, florianc@zedat.fu-berlin.de

Tutor:

Ramona Kositzki, r.kositzki@fu-berlin.de

Praktikumsleiterin:

Dr. Beate Schattat

Physikalische Grundlagen	3
Vorbereitung.....	3
<i>Laminare Strömung</i>	3
<i>Viskosität</i>	3
<i>Innere Reibung</i>	3
<i>Reynolds-Zahl</i>	3
<i>Messformeln</i>	3
Aufgaben.....	4
Versuchsaufbau + Geräteliste.....	4
Durchführung.....	5
Messprotokoll	6
Tabellen und Plots.....	6
Auswertung und Diskussion	11
Aufgabe 1.....	11
Aufgabe 2.....	12
Aufgabe 3.....	12
Aufgabe 4.....	14
Zusammenfassung.....	15

Physikalische Grundlagen

In diesem Versuch werden laminare Strömungen untersucht. Aus den Sinkgeschwindigkeiten von Kugeln unterschiedlichen Durchmessers in einer Flüssigkeit wird auf die Viskosität geschlossen.

Vorbereitung

Laminare Strömung

Die Laminare Strömung beschreibt das aneinander vorbeigleiten von Fluiden. Sie gleiten ähnlich von „Schichten“ aneinander und vermischen sich dabei nicht. Die Strömung ist frei von Turbulenzen.

Viskosität

Die Viskosität beschreibt die temperaturabhängige Zähflüssigkeit von Fluiden. Sie wird mit dem Symbol η gekennzeichnet und wird in $\frac{Kg}{m \cdot s}$ angegeben.

Innere Reibung

Bei Fluiden Grund für die Zähflüssigkeit; Moleküle, die in Schichten übereinander liegen, müssen zur Fortbewegung Potentiale überwinden.

Reynolds-Zahl

Maßzahl für die Unterscheidung zwischen laminarer (Reynolds-Zahl klein) und turbulenter (Reynolds-Zahl groß) Strömung. Der Schwellwert für den Übergang liegt bei Kugeln in Rohren bei etwa 2300; bei Kugeln in einem unendlich ausgedehnten Material bei etwa 1. Symbol: Re.

Messformeln

$$F_G = mg \quad \text{Gleichung 1}$$

$$F_A = \rho_F V_F g \quad \text{Gleichung 2}$$

$$F_R = -6\pi\eta r v \quad \text{Gleichung 3}$$

$$\eta(T) = A e^{\frac{B}{T}} \quad \text{Gleichung 4}$$

$$Re = \frac{\rho_F v r}{\eta} \quad \text{Gleichung 5}$$

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{Gleichung 6}$$

Da nach der Beschleunigungsphase ein Kräftegleichgewicht besteht, gilt für diese Zeitspanne:

$$F_G - F_A = F_R \quad \text{Gleichung 7}$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen:

$$mg - \rho_F V_F g = 6\pi\eta r v \quad \text{Gleichung 8}$$

$$r^2 = \frac{9}{2} \frac{\eta v}{(\rho_K - \rho_F) g} \quad \text{Gleichung 9}$$

$$v = \frac{2}{9} \frac{gr^2(\rho_K - \rho_F)}{\eta} \quad \text{Gleichung 10}$$

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{gr^2(\rho_K - \rho_F)}{v} \quad \text{Gleichung 11}$$

Aufgaben

1. Messung der Fallgeschwindigkeit von Stahlkugeln mit bekanntem und unbekanntem Radius in Abhängigkeit von der Temperatur.
2. Untersuchung der funktionalen Abhängigkeit der Viskosität des Rizinusöls von der Temperatur. Bestimmung der Viskosität des Öles bei 20 °C und Vergleich mit dem Literaturwert.
3. Bestimmung der Radien der unbekanntenen Stahlkugeln aus den Messungen und Vergleich mit einer direkten Messung mit einer Mikrometerschraube.
4. Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichung mit den Randbedingungen $v(t = 0) = v_0 = 0$ und $v(t \rightarrow \infty) = v_\infty$ und Abschätzung der Zeit bzw. Wegstrecke, ab der die Kugeln mit praktisch konstanter Geschwindigkeit sinken.

Versuchsaufbau + Geräteliste

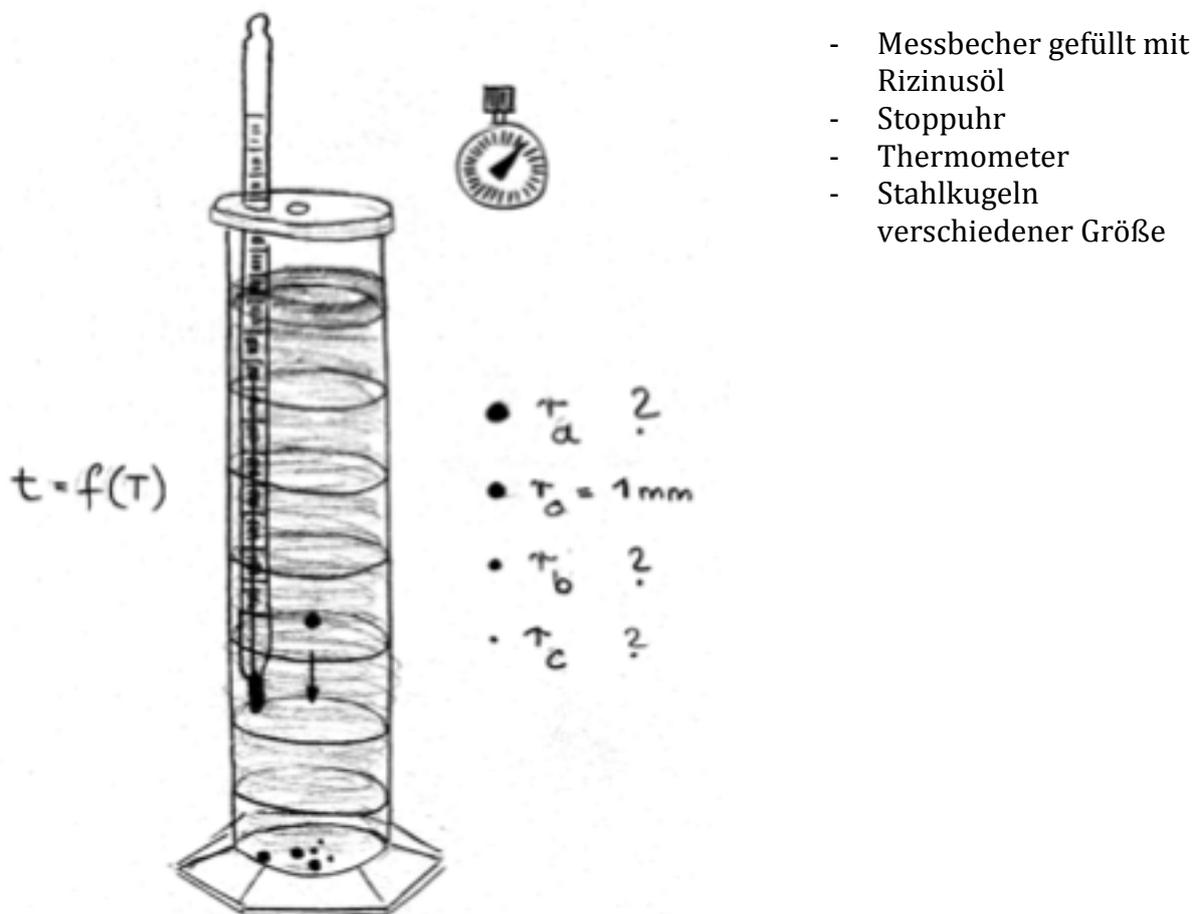


Abbildung 1 Skizze zum Versuchsaufbau

Übersicht Verwendeter Formelzeichen

F_G Gewichtskraft	F_R Stokes'sche Reibungskraft
F_A Auftriebskraft	g Fallbeschleunigung
v Geschwindigkeit	η Viskosität
ρ Dichte	m_K Masse Kugel r_0
t Zeit	s Strecke
T_a Anfangstemperatur	T_e Endtemperatur
r Radius der Fallenden Kugel	

Durchführung

Es sind mit Rizinusöl gefüllte Standzylinder und Kugeln verschiedener Radien vorhanden. Der Zylinder trägt Ringmarken, deren Abstand mit einem Metallmaßstab gemessen werden kann. Die Bestimmung der Fallzeiten erfolgt mit Handstoppuhren. Die Kugeln sind vor jeder Messung *gut zu reinigen*, da an den Kugeln anhaftendes, altes Öl verharzt sein und damit den scheinbaren Radius der Kugeln vergrößern kann.

Die Einstellung und Konstanthaltung unterschiedlicher Temperaturen zur Messung der Temperaturabhängigkeit wäre wegen der thermischen Trägheit der Apparatur (Standzylinder mit Öl) sehr langwierig. Aus Vereinfachungsgründen werden deshalb die Standzylinder vor Versuchsbeginn abgekühlt (Kühlschrank), so dass man durch die Aufwärmung während der Versuchsdurchführung unterschiedliche Temperaturen erhält.

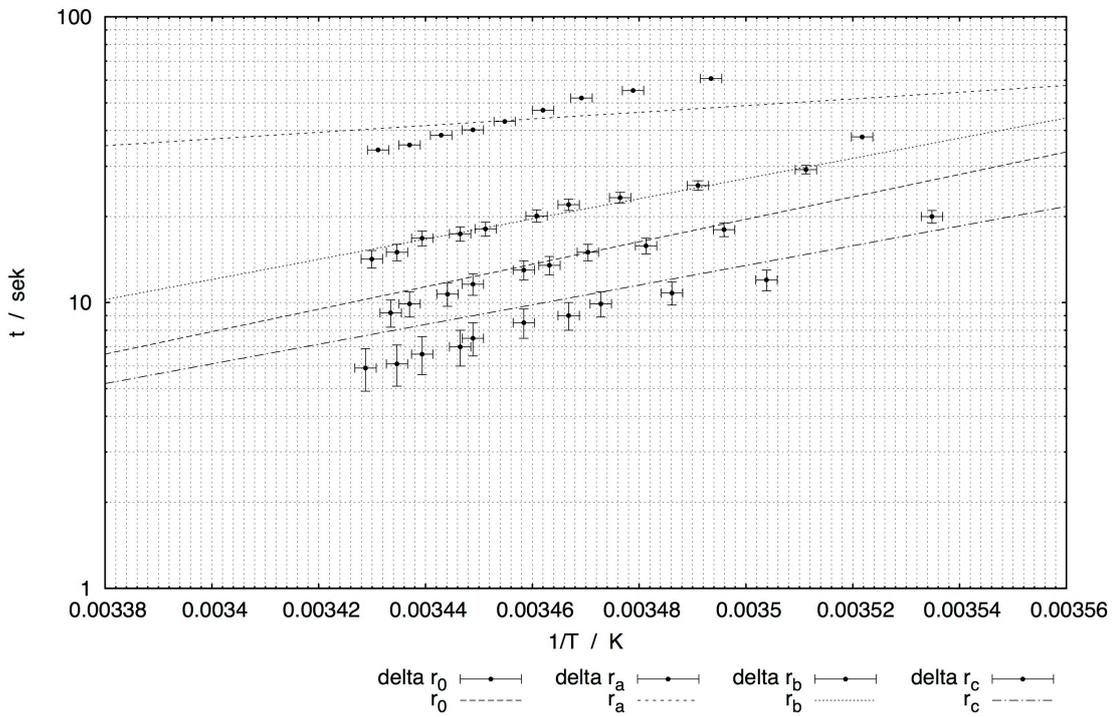
Zur Versuchsdurchführung werden die Fallzeiten der verschiedenen Kugeln in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen. Die Messungen müssen *über einen Zeitraum von mindestens einer Stunde* durchgeführt werden, um eine genügend große Temperaturänderung und ausreichend viele Messpunkte zu erhalten. Man geht zweckmäßigerweise so vor, dass man nacheinander und wiederholend in gleichbleibender Reihenfolge die Fallzeiten für die verschiedenen Kugeln und die zugehörigen Temperaturen aufnimmt.

Die Temperatur sollte bei den Messungen 20 °C nicht übersteigen. Sollte der Moment da sein, an dem 20 °C überschritten werden ist das Experiment an dem Punkt beendet und es wird mit den vorhandenen Messwerten gearbeitet.

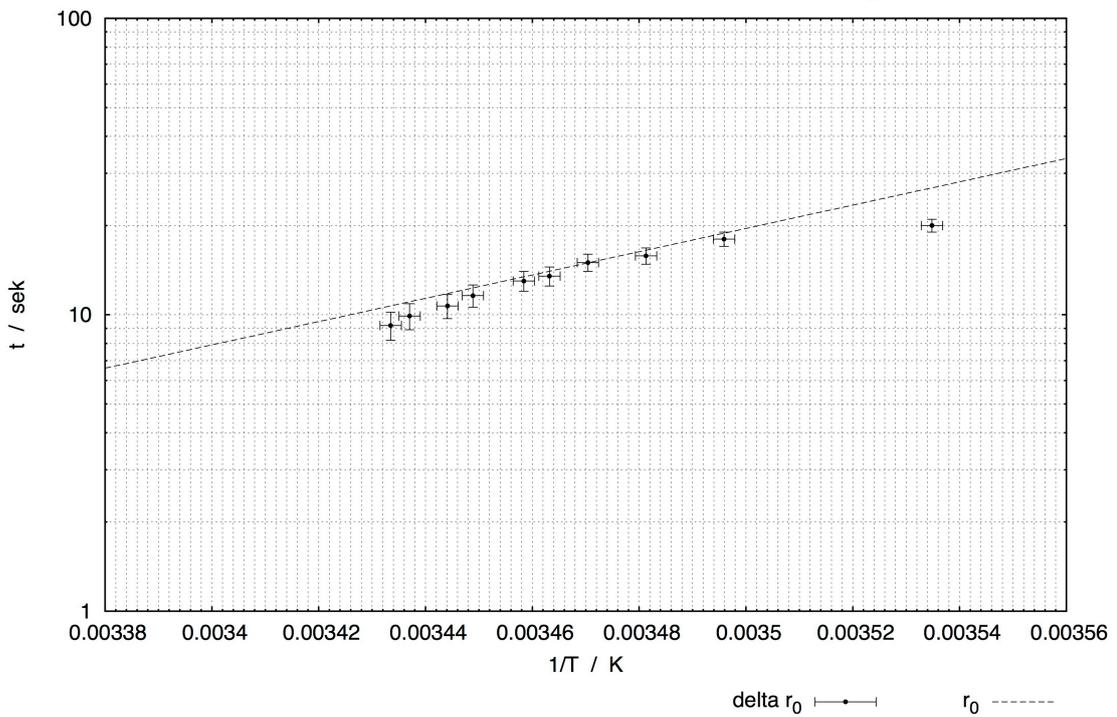
Messprotokoll

Tabellen und Plots

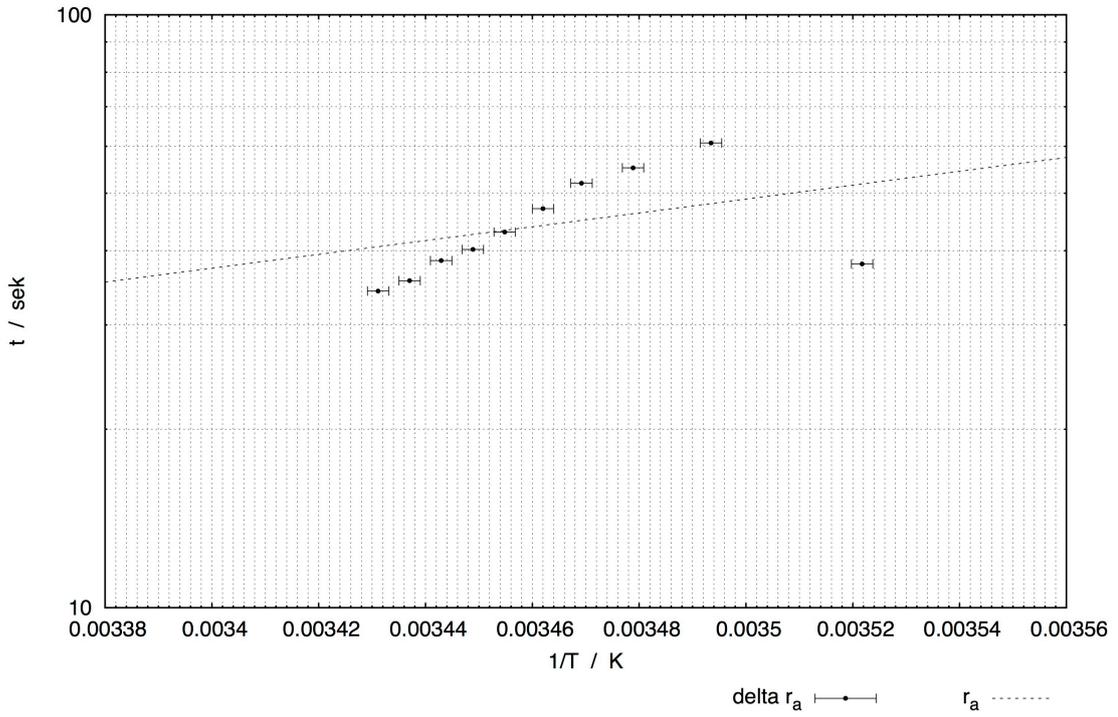
Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur



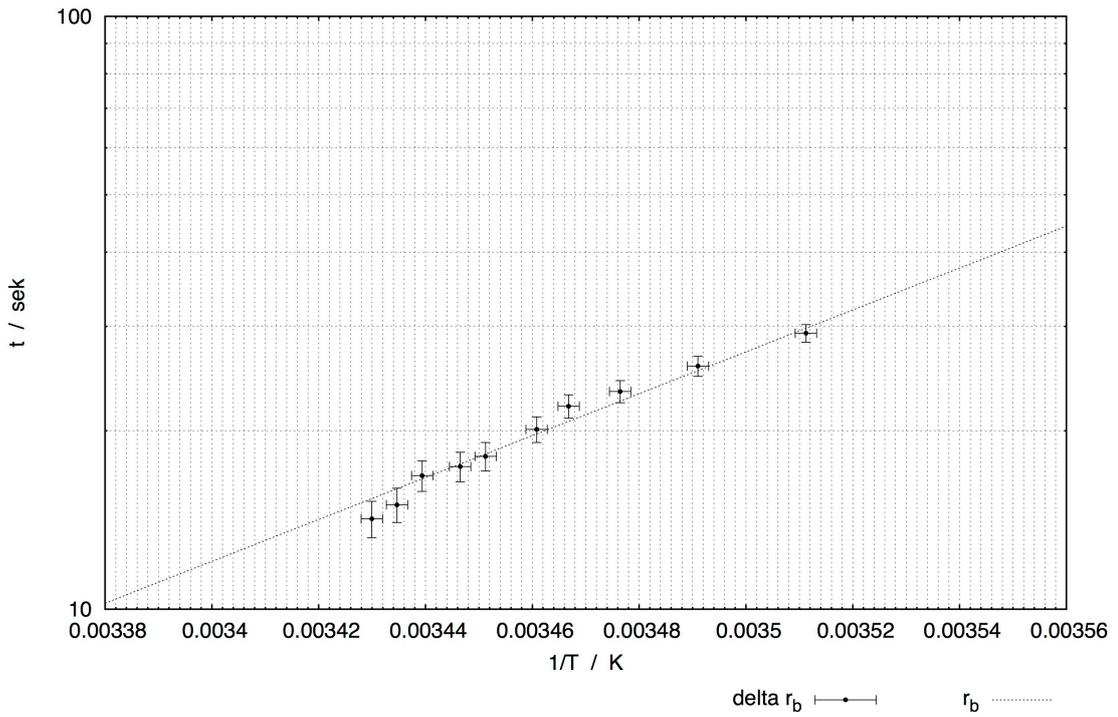
Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur - r_0



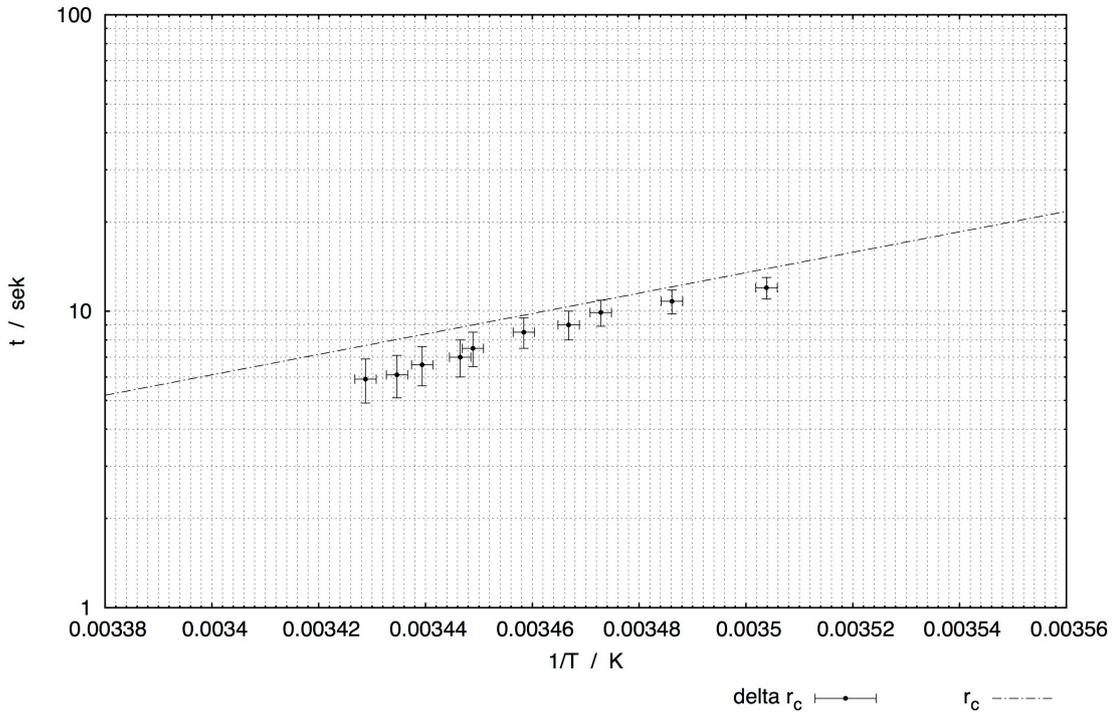
Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur - r_a



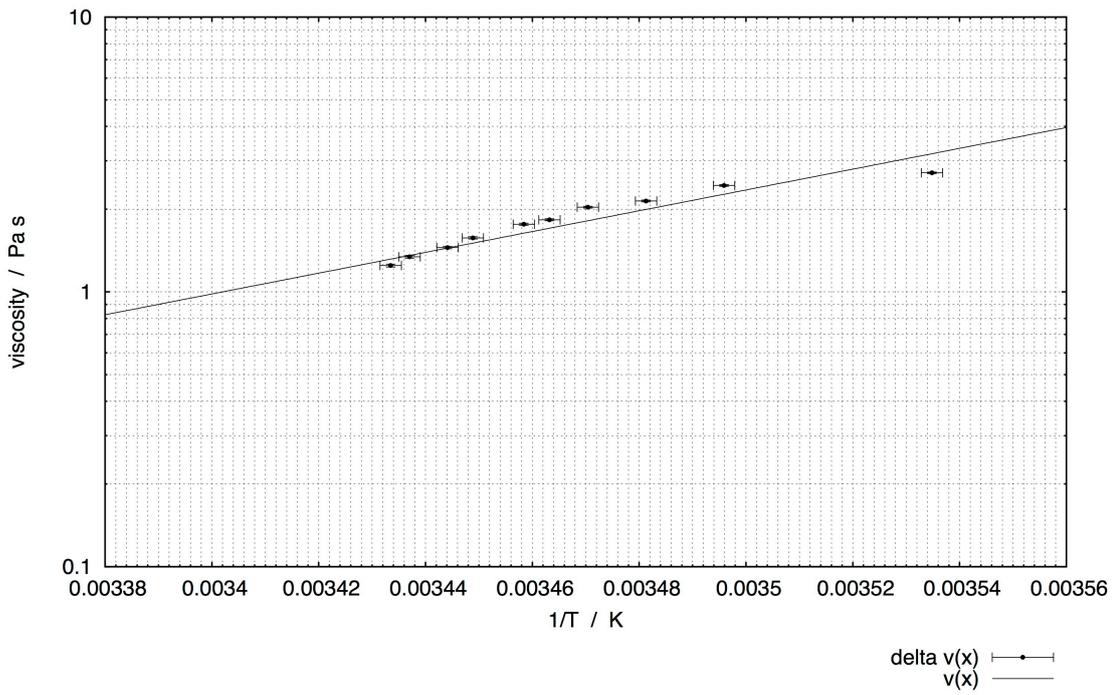
Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur - r_b



Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur - r_c



Viskosität in Abhängigkeit von der Temperatur - r_0



r_0	T_s in C°	T_e in C°	ΔT	t in sek.	V in m/s	Viskosität in η	$\ln(t)$	1/T
1	9,70	9,80	9,75	20,00	0,5	17,66877574	2,99573227	0,1025641
2	12,80	13,00	12,90	18,00	0,6	14,72397978	2,89037176	0,07751938
3	14,00	14,20	14,10	15,80	0,7	12,6205541	2,76000994	0,07092199
4	15,00	15,00	15,00	15,00	0,7	12,6205541	2,7080502	0,06666667
5	15,60	15,60	15,60	13,50	0,8	11,04298484	2,60268969	0,06410256
6	16,00	16,00	16,00	13,00	0,8	11,04298484	2,56494936	0,0625
7	16,80	16,80	16,80	11,60	0,9	9,815986522	2,4510051	0,05952381
8	17,20	17,20	17,20	10,70	1,0	8,83438787	2,37024374	0,05813953
9	17,80	17,80	17,80	9,90	1,1	8,0312617	2,29253476	0,05617978
10	18,00	18,20	18,10	9,20	1,2	7,361989892	2,21920348	0,05524862
exapoliert	20,00	20,00	20,00	7,31	1,5	5,889591913	1,9898505	0,05

Tabelle 1: Messwerte für r_0

r_e	T_s in C°	T_e in C°	ΔT in K	t in sek.	V in m/s	Viskosität in η	$\ln(t)$	1/T
1	10,30	11,30	10,80	38,00	0,3	29,44795957	3,63758616	0,09259259
2	13,00	13,20	13,10	60,80	0,2	44,17193935	4,10758979	0,07633588
3	14,20	14,40	14,30	55,20	0,2	44,17193935	4,01096295	0,06993007
4	15,00	15,20	15,10	52,00	0,2	44,17193935	3,95124372	0,06622517
5	15,60	15,80	15,70	47,10	0,2	44,17193935	3,852273	0,06369427
6	16,20	16,40	16,30	43,00	0,3	29,44795957	3,76120012	0,06134969
7	16,80	16,80	16,80	40,20	0,3	29,44795957	3,693867	0,05952381
8	17,20	17,40	17,30	38,50	0,3	29,44795957	3,65065824	0,05780347
9	17,80	17,80	17,80	35,60	0,3	29,44795957	3,57234564	0,05617978
10	18,20	18,40	18,30	34,20	0,3	29,44795957	3,53222564	0,05464481

Tabelle 2: Messwerte für r_a

r_b	T_s in C°	T_e in C°	ΔT in K	t in sek.	V in m/s	Viskosität in η	$\ln(t)$	1/T
1	11,30	12,00	11,65	29,20	0,4	22,08596968	3,37416871	0,08583691
2	13,20	13,40	13,30	25,70	0,4	22,08596968	3,24649099	0,07518797
3	14,40	14,60	14,50	23,30	0,5	17,66877574	3,14845336	0,06896552
4	15,20	15,40	15,30	22,00	0,5	17,66877574	3,09104245	0,06535948
5	15,80	15,80	15,80	20,10	0,5	17,66877574	3,00071982	0,06329114
6	16,60	16,60	16,60	18,10	0,6	14,72397978	2,89591194	0,06024096
7	17,00	17,00	17,00	17,40	0,6	14,72397978	2,85647021	0,05882353
8	17,60	17,60	17,60	16,80	0,6	14,72397978	2,82137889	0,05681818
9	18,00	18,00	18,00	15,00	0,7	12,6205541	2,7080502	0,05555556
10	18,40	18,40	18,40	14,20	0,8	11,04298484	2,65324196	0,05434783

Tabelle 3: Messwerte für r_b

r_c	T_z in $^{\circ}C$	T_e in $^{\circ}C$	ΔT in K	t in sek.	V in m/s	Viskosität in η	$\ln(t)$	1/T
1	12,20	12,30	12,25	12,00	0,9	36,01940576	2,48490665	0,08163265
2	13,60	13,80	13,70	10,80	1,0	32,41746519	2,37954613	0,0729927
3	14,80	14,80	14,80	9,90	1,1	29,4704229	2,29253476	0,06756757
4	15,20	15,40	15,30	9,00	1,2	27,01455432	2,19722458	0,06535948
5	16,00	16,00	16,00	8,50	1,3	24,93651168	2,14006616	0,0625
6	16,80	16,80	16,80	7,50	1,5	21,61164346	2,01490302	0,05952381
7	17,00	17,00	17,00	7,00	1,6	20,26091574	1,94591015	0,05882353
8	17,60	17,60	17,60	6,60	1,7	19,06909717	1,88706965	0,05681818
9	18,00	18,00	18,00	6,10	1,8	18,00970288	1,80828877	0,05555556
10	18,40	18,60	18,50	5,90	1,8	18,00970288	1,77495235	0,05405405

Tabelle 4: Messwerte für r_c

	Wert	Einheit	Fehler
s	10,9	cm	$\pm 0,05$
r_0	1	mm	
Δt		s	$\pm 0,03$
ΔT	0,5	$^{\circ}C$	$\pm 0,5$
Dichte Kugel	7,81	$10^3 \frac{Kg}{m^3}$	$\pm 0,02$
Dichte Öl	0,975	$10^3 \frac{Kg}{m^3}$	$\pm 0,005$

Tabelle 1 Messbereiche und konstante Größen und deren Fehler

Auswertung und Diskussion

Aufgabe 1

Siehe *Tabelle 1-4* und dazugehörige Grafik

Aufgabe 2

Um die Fallzeit für die Kugel r_0 zu ermitteln, wurden die Werte für diese Kugel in die Grafik eingetragen und daraus die Fallzeit bei 20°C bzw. 293,15K extrapoliert. Die dabei abgelesene Fallzeit beträgt bei 20°C $t_0 = 7,31$ s

Es sind somit die Werte wie in *Tabelle 5* ersichtlich gegeben. Um die Viskosität zu bestimmen setzen wir alle Werte in eine umgeformte Variante von *Gleichung 13* ein und erhalten:

$$\eta_{20^\circ\text{C}} = \frac{2}{9} \frac{r^2 t}{s} (\rho_K - \rho_{FL}) g = \frac{2}{9} \frac{0,001^2 \text{m}^2 7,31 \text{s}}{0,109 \text{m}} \left(7,81 * 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0,975 * 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,999 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

Fehlerbetrachtung:

Die Fehlerbetrachtung erfolgt durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung. Die Fehler der einzelnen Größen können aus *Tabelle 5* entnommen werden.

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{Ar^2}{s} \Delta t\right)^2 + (Atr^2 \ln s \cdot \Delta s)^2}$$

Für den Fehler der Viskosität ergibt sich also: $\eta=0,05$.

Als Ergebnis für die Viskosität erhalten wir also einen Wert von $0,999 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \pm 0,05 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Aufgabe 3

Um die Radien der anderen Kugeln zu berechnen, benutzen wir wieder die extrapolierten Zeiten der Kugeln bei 20°C um dann mit dieser Gleichung (durch gleichsetzen der Viskosität)

$$r_x = r_0 * \sqrt{\frac{t_0}{t_x}}$$

Gleichung 12

die Radien zu berechnen. Es ergeben sich folgende Fallzeiten:

	t in s bei 20°C
r₀	7,31
r_a	36,07
r_b	10,86
r_c	4,17

Tabelle 2 Fallzeiten in Sekunden bei 20°C

Und somit folgende Radien:

r_a	$r_x = r_0 * \sqrt{\frac{t_0}{t_x}} = 0,001 * \sqrt{\frac{7,31}{36,07}} = 0,45\text{mm}$
r_b	$r_x = r_0 * \sqrt{\frac{t_0}{t_x}} = 0,001 * \sqrt{\frac{7,31}{10,86}} = 0,80\text{mm}$
r_c	$r_x = r_0 * \sqrt{\frac{t_0}{t_x}} = 0,001 * \sqrt{\frac{7,31}{4,17}} = 0,90\text{mm}$

Werte sind gerundet.

	r_0	r_a	r_b	r_c
r	$1 \pm 0,2$	$0,72 \pm 0,2$	$0,57 \pm 0,2$	$1,275 \pm 0,2$
d	$2 \pm 0,2$	$1,44 \pm 0,2$	$1,14 \pm 0,2$	$2,55 \pm 0,2$

Tabelle 7: Mit Mikrometerschraube gemessene Durchmesser und Radien in mm

Der Fehler der Mikrometerschraube beträgt $\pm 0,2$ mm.

Fehlerbetrachtung:

$$r_x = r_0 \cdot \sqrt{\frac{t_0}{t_x}}$$

$$\frac{\delta R_a}{\delta t_0} = \frac{R_0}{2t_a \sqrt{\frac{t_0}{t_a}}}$$

$$\frac{\delta R_a}{\delta t_a} = \frac{-R_0 t_0}{2\sqrt{\frac{t_0}{t_a}} t_a^2}$$

$$\Delta R_a = \sqrt{\left(\frac{\delta R_a}{\delta t_0} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\delta R_a}{\delta t_a} \Delta t\right)^2} \cdot R_a$$

$$\Delta R_a = \sqrt{\left(\frac{R_0}{2t_a \sqrt{\frac{t_0}{t_a}}} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{-R_0 t_0}{2\sqrt{\frac{t_0}{t_a}} t_a^2} \Delta t\right)^2} \cdot R_a$$

Aufgabe 4

Erstellen der DGL: Achtung : für die zweite Ableitung nach dem Ort verwenden wir " statt Punkte über der Variablen.

Die Bewegungsgleichung für den Fall der Kugel lässt sich nach dem 2. Newton'schen Axiom aufstellen:

$$F = m_K \cdot z''$$

wobei m_K die Masse der fallenden Kugel, F , die auf die Kugel wirkenden Kräfte und z'' die zweite Ableitung des Ortes (auf der vertikalen Achse) nach der Zeit ist. Werden für F die Summe der Kräfte eingesetzt, die auf die Kugel wirken so ergibt sich:

$$m_K \cdot z'' = -m_K \cdot g + V \cdot \rho F \cdot g - 6\pi\eta r z'$$

Durch Umformen, Zusammenfassen und Ersetzen von z' mit v ergibt sich:

$$\frac{dv}{dt} = -mg - \alpha v$$

durch Trennung der Variablen kann das Integral berechnet werden:

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{-1}{mg - \alpha v} dv$$

Die Lösung des Integrals ergibt sich zu:

$$(mg + \alpha v) e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Durch Einsetzen wird

$$e^{-\frac{6\pi\eta r}{m_K} t} = 0$$

Durch Einsetzen der Viskosität, dem Radius der Kugel r_0 , der Masse der Kugel m_K (0,04 kg) ergibt sich eine konstante Fallgeschwindigkeit nach einer Strecke von $2,0 \cdot 10^{-7}$ m. Damit dürfte die konstante Fallgeschwindigkeit nach wenigen Millisekunden erreicht sein.

Zusammenfassung

Beim Betrachten der berechneten Viskosität sieht man, dass der Wert sehr nahe am Literaturwert liegt, dieser liegt laut Skript bei $\eta = 0,99 \text{ hPas}$ ¹, dieser Wert ist auch der, der in der Rechnung herauskommt (\pm den Fehler von 0,05, siehe Aufgabe 2). Hierzu muss man allerdings gewisse Dinge beachten, bei uns im Versuch lief die Messung und die Viskositätsbestimmung glatt, aber sollte das Öl mal länger gestanden haben (mehrere Tage) ist schon dort ein Verlust an Viskosität vorfindbar.

Die errechneten Kugelradien aus Aufgabe 3 stimmen in etwa mit den Gemessenen überein, was an der möglicherweise fehlerhaften Nutzung der Mikrometerschraube liegen kann, oder aber an eventuellen Messungenauigkeiten durch die Schraube selbst, da sich solche Geräte mit den Jahren etwas abnutzen, sich verziehen und ggf. die Messung nicht mehr akkurat ist. Die errechneten Radien liegen jeweils im doppelten Fehlerintervall und sind damit mit den gemessenen Radien verträglich.

Insgesamt ist der Versuch für die Viskositätsbestimmung, sowie für das Berechnen der Kugelradien und im Endeffekt auch für die Bestimmung der DGL gut geeignet, wenn man Fehlerquellen vorher kennt und weiß wie diese minimal zu halten sind.

¹ Quelle: GP1 Skript