

11.7.2014

Freie Universität Berlin

- Fachbereich Physik –

Harmonische Schwingungen

Protokoll zum Versuch des physikalischen Grundpraktikums I

Teilnehmer:

Ludwig Schuster, ludwig.schuster@fu-berlin.de

Florian Conrad, florianc@zedat.fu-berlin.de

Tutor:

Andre Boden, andre.boden@fu-berlin.de

Praktikumsleiterin:

Dr. Beate Schattat

Einleitung	3
Versuchsaufbau:	3
Physikalische Grundlagen	3
Auswertung.....	9
<i>Aufgabe 1</i>	9
<i>Aufgabe 2</i>	12
<i>Aufgabe 3</i>	14
<i>Aufgabe 4:</i>	15
Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	17

Einleitung

Versuchsaufbau:

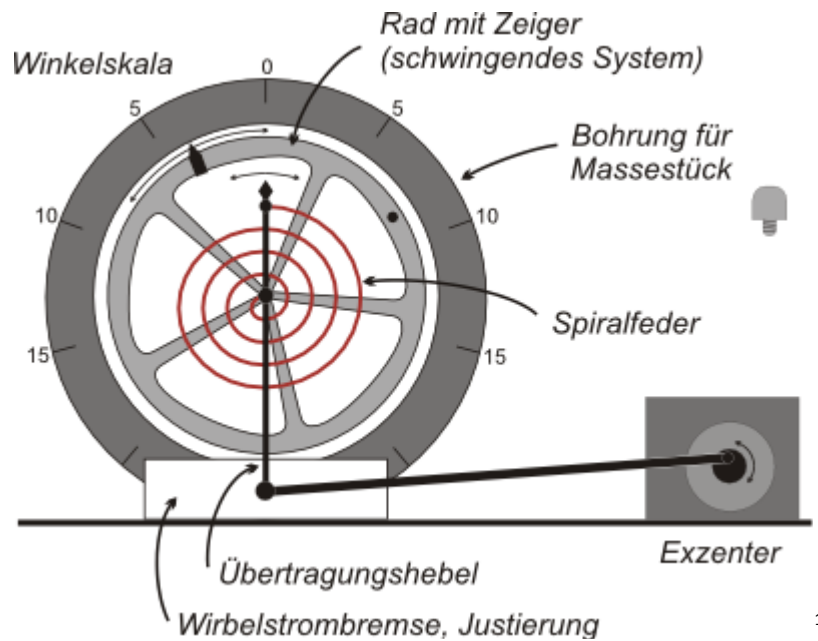


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Physikalische Grundlagen

Die Bewegungsgleichung für Schwingungen mit linearer Rückstellkraft lautet:

$$mx'' + D x = 0$$

Gleichung 1

Solche linearen Differentialgleichungen werden mit dem Ansatz

$$x(t) = e$$

Gleichung 2

gelöst. Daraus ergibt sich, mit Hilfe der zweiten Ableitung eine charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - \frac{D}{m} = 0 \rightarrow \omega = \dot{\Omega} \left(\frac{D}{m} \right) e = \pm \omega_0$$

Gleichung 3

¹ Quelle: <http://lp.uni-goettingen.de/get/image/181>

aus der sich die speziellen Eigenfrequenzen des Systems, $+w_0$ und $-w_0$ ergeben. Die allgemeine Differentialgleichung ist dann die Summe der einzelnen Differentialgleichung, allerdings müssen dabei zwei beliebige Konstanten C_1 und C_2 beachtet werden:

$$x(t) = C_1 e^{I\omega_0 t} + C_2 e^{-I\omega_0 t}$$

Gleichung 4

Um eine auf die Realität anwendbare – also physikalisch sinnvolle – Lösung zu erhalten, betrachtet man von diesen nur die vollständig reellen Funktionen. Das sind jene, bei denen C_1 und C_2 konjugiert komplex sind. Dann muss gelten:

$$C_1 = \frac{1}{2} A e^{ib}$$

und

$$C_2 = \frac{1}{2} A e^{-ib} = C_1^*$$

Daraus ergibt sich wiederum

$$x(t) = \frac{1}{2} A * [e^{i(\omega_0 t + \beta)} + e^{-i(\omega_0 t + \beta)}]$$

Gleichung 5

also

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta)$$

Gleichung 6

Daraus erhält man:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

Gleichung 7

wenn man C_1 und C_2 wie folgt schreibt:

$$C_1 = \frac{1}{2} (A_1 - iA_2) \text{ und } C_2 = \frac{1}{2} (A_1 + iA_2)$$

Gleichung 8

Die Konstanten A_1 , A_2 und b werden dabei durch die Anfangsbedingungen des Systems bestimmt. Berücksichtigt man nun zusätzlich auch noch eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft, so ergibt sich für die zu lösende Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$$

Auf dem selben Wege wie eben erhält man die charakteristische Gleichung mit

$$\omega = \frac{ik}{2m} + \Omega \left(\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2} \right) = id + \omega_1$$

Mit

$$d = \frac{k}{2m} \text{ und } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

Daraus ergibt sich die Lösung:

$$x(t) = C_1 e^{-dt} e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-dt} e^{-i\omega_1 t}$$

Gleichung 10

Wieder sind für uns nur die reellen Lösungen interessant, wobei drei Fälle des Verhaltens unterscheidbar sind: Der Schwingfall, in dem $d < \omega_0$ ist. Hier ist ω_1 komplett reell, weshalb die Konstanten konjugiert-komplex sind und sich die Lösung

$$x(t) = e^{-dt} [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_1 t)]$$

Gleichung 11

wobei für die Konstanten gilt

$$A_1 = x_0 \text{ und } A_2 = \frac{dx_0 + x_0 \omega_0}{\omega_0}$$

Gleichung 12

Zweitens den Kriechfall, bei dem $d > \omega_0$ gilt, die Frequenz also imaginär wird. Zieht man nun durch Umstellen i vor den Ausdruck, so ergibt sich

$$\omega = i [d \pm \sqrt{d^2 - \omega_0^2}] = i d_{1,2}$$

Gleichung 13

Es ergibt sich die Lösung

$$x(t) = C_1 e^{-d_1 t} + C_2 e^{-d_2 t}$$

Gleichung 14

die aber nur reell wird, wenn die aus den Anfangsbedingungen bestimmten Konstanten C_1 und C_2 reell sind. Durch die hier betrachtete sehr starke Reibung wird das System nicht in Schwingung versetzt, sondern es tritt nur ein monotones Zurückgleiten in den Urzustand auf, ein Kriechen sozusagen. Ein letzter zu betrachtender Fall tritt für $d = \omega_0$ und $\omega_1 = 0$ auf und wird Aperiodischer Grenzfall genannt. Er liegt zwischen Kriech- und Schwingfall. Seine Beschreibung gelingt durch eine Grenzwertbetrachtung der allgemeinen Bewegungsgleichung für freie, gedämpfte Schwingungen.

$$x(t) = e^{-dt} x_0 \cos(\omega_1 t) + (d x_0 + \dot{x}_0) \sin \frac{(\omega_1 t)}{\omega_1}$$

Es ergibt sich die nicht-periodische Bewegung

$$x(t) = x_0 e^{-dt} + (d x_0) t e^{-dt}$$

Der aperiodische Grenzfall sorgt somit für die schnellste Rückkehr in die Ruhelage, was real durchaus von Bedeutung sein kann. Regt man ein solches gedämpftes schwingungsfähiges System zusätzlich mit einer periodischen äußeren Kraft der Frequenz Ω an, so ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\underline{m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F_0 \cos(\Omega t)}$$

Dies ist nun, im Gegensatz zum bekannten, eine inhomogene Differentialgleichung und ihre Lösung setzt sich aus der zugehörigen homogenen Gleichung und einer Partikulär-Lösung zusammen. Die von uns angenommene Partikulär-Lösung geht davon aus, dass das System nach langen Zeiten auch mit der Außenfrequenz Ω schwingt, allerdings Phasenverschoben. Also

$$x(t) = A_s \cos(\Omega t + \phi)$$

Die einfachsten Ergebnisse erhält man hier mit dem Ansatz

$$F(t) = F_0 e^{i\Omega t}$$

und

$$x(t) = A_s e^{i(\Omega t + \phi)}$$

Dabei wird das reale Geschehen durch den Realteil der Kraftgleichung bzw. Betrag und Phase der Gleichung beschrieben.

Durch einige Umformungen ergibt sich

$$(D - m\Omega^2 + ik\Omega)A_s e^{i\phi} = F_0$$

und:

$$A_s e^{i\phi} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2id\Omega)}$$

wobei

$$\omega_0 = \Omega'' \frac{D}{m} \text{ und } d = \frac{k}{2m} \text{ ist}$$

Daraus ergibt sich

$$A_s = A_s(\Omega'') = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{(\Omega'')[(\omega_0^2 - [\Omega''])^2 + 4d^2\Omega'^2]}$$

Gleichung 18

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{(-2d\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

Bei solchen erzwungenen Schwingungen tritt also eine Resonanz auf, in deren Verlauf die Amplitude und Phasenverschiebung abhängig von der Erregerfrequenz und besonders vom Grad der Dämpfung beeinflusst werden.

Bei kleiner Dämpfung kann es zu einer sehr großen Amplitude und einer sehr kleinen Phasenverschiebung im Übergangsbereich kommen (Resonanzkatastrophe und Phasensprung).

Das Maximum hat also:

$$A_{\Omega} = \omega_0 = \frac{A_{mx} \left(\frac{F_0}{m}\right)}{2d\omega_0}$$

Um auch die erzwungene Schwingung allgemein zu lösen, muss man die drei bisherigen Ansätze verbinden. Dann ergibt sich:

$$x(t) = Ae^{-dt} \cos(\omega_0 t + \beta) + A_s(\Omega) \cos(\Omega t + \phi)$$

Gleichung 19

Mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$, $x' = 0$ sowie den Annahmen $d \ll \omega_0$ und $\Omega \gg \omega_0$ ergibt sich die Näherung

$$x(t) = A_s [\cos(\Omega t + \phi) - e^{-dt} \cos(\omega_0 t + \beta)]$$

Für den Fall das $\Omega = \omega_0$ exakt erreicht wird, wird P zu $p/2$ und die Schwingungsgleichung vereinfacht sich zu

$$x(t) = A_s (1 - e^{-dt}) \sin(\omega_0 t)$$

Dabei schwingt das System beim Einschalten gegen den Grenzwert A_s der Amplitude.

Aufgaben:

Aufgabe 1)

Untersuchung von freien gedämpften Schwingungen. Aufnahme der Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit. Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfungskonstanten des Systems.

Aufgabe 2)

Untersuchung von erzwungenen Schwingungen. Aufnahme der Auslenkung in der Abhängigkeit von der Frequenz. Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfungskonstanten.

Aufgabe 3)

Qualitative Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen Erreger und Oszillator in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz.

Aufgabe 4)

Beobachtung der Einschwingvorgänge für den Resonanzfall und für eine Anregungsfrequenz in der Nähe der Resonanz.

Auswertung

Aufgabe 1

Zeit [s]	Amplitude
3.501	0.641
5.301	0.561
7.101	0.446
8.901	0.308
10.701	0.166

Tabelle 1: Messung mit Dämpfungsstufe 2

Zeit [s]	Amplitude
0.501	0.707
2.301	0.579
4.101	0.4435
5.901	0.3055
7.701	0.1785
9.501	0.0725

Tabelle 2: Messung mit Dämpfungsstufe 3

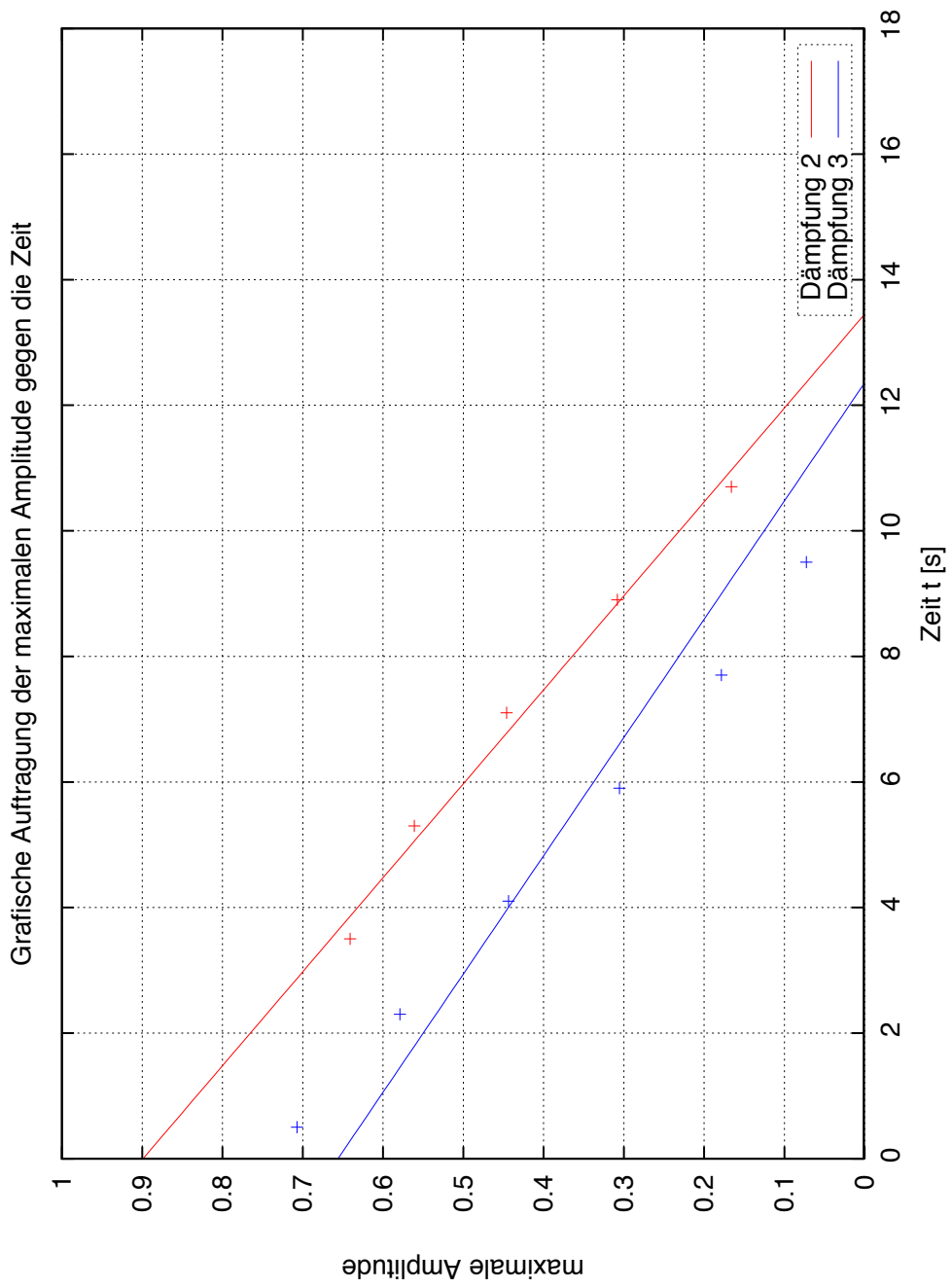


Abbildung 2: Grafische Auswertung Aufgabe 1: Auftragung der maximalen Amplitude gegen die Zeit

a) Bestimmung der Dämpfungskonstanten

Die Dämpfungskonstanten für die Dämpfungsstufen 2 und 3 ergeben sich aus der Steigung der Messwerte, die in Abbildung [2] grafisch aufgetragen wurden. Die Amplitude wurde dabei logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen und die Steigung und der Fehler der Geraden mit Hilfe des Programms GNU PLOT unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

$$\delta_1 = (-0,021 \pm 0,001) \frac{1}{s}$$

$$\delta_2 = (-0,100 \pm 0,007) \frac{1}{s}$$

b) Bestimmung der Eigenfrequenz

Die Eigenfrequenz steht mit der Frequenz ω_1 in Zusammenhang:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Ein weiterer Zusammenhang für ω_1 ist:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

mit T als Periodendauer. Die Differenz Δt von zwei positiven oder negativen Maxima der Amplituden ergibt die Periodendauer T . Für eine bessere Näherung der Periodendauer wurden 10 Perioden gemessen und anschließend die Zeitdifferenz Δt dadurch dividiert, so dass sich ein Mittelwert für die Periodendauer T ergibt.

$$T_1 = (1,77 \pm 0,03) s$$

$$T_2 = (1,73 \pm 0,03) s$$

Damit ergibt sich:

$$\omega_1 = (3,55 \pm 0,01) \frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = (3,63 \pm 0,01) \frac{1}{s}$$

Wobei der Fehler nach:

$$\Delta\omega_1 = \sqrt{\frac{\delta\omega_1^2}{\delta T^2} * \Delta T^2}$$

berechnet wurde

Als Eigenfrequenz ergibt sich dann:

$$\omega_1 = (3,55 \pm 0,01) \frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = (3,63 \pm 0,01) \frac{1}{s}$$

Aufgabe 2

Messung	Periodenzahl	Zeit t_1 [s]	Zeit t_2 [s]	Amplitude
1	10	86,1	115	0,021
2	10	76,1	89,8	0,21
3	10	70,6	89,8	0,398
4	7	1,6	15,3	0,204
5	10	101,2	118,9	0,107
6	10	101,7	119,5	0,115
7	10	150,4	168,3	0,135
8	10	151,7	169,8	0,168
9	10	100,7	119	0,212
10	10	91,4	110,8	0,244
11	10	100,3	119,3	0,62

Tabelle 3: Messung zur Aufgabe 2

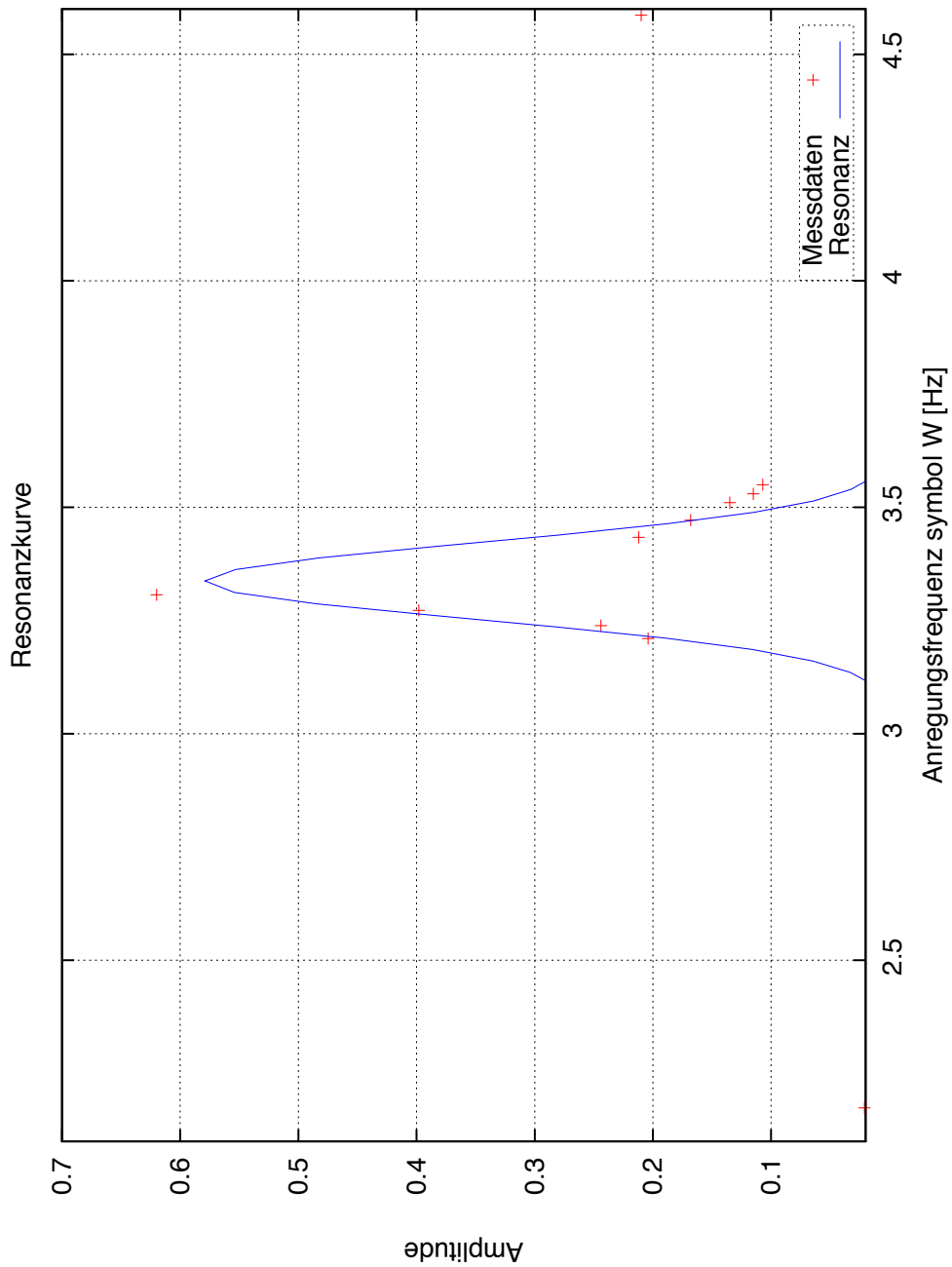


Abbildung 3: Grafische Auswertung Aufgabe 2: Resonanzkurve

Es wurde die Amplitude gegen die Anregungsfrequenz aufgetragen. Es ergibt sich eine typische Resonanzkurve, in Form einer Lorentzfunktion. Das Maximum der gefitteten Lorentzfunktion entspricht der Eigenfrequenz des Systems, da im Resonanzfall $\Omega = \omega_0$ gilt.

Die Dämpfungskonstante δ entspricht der halben Breite der der Kurve bei $\frac{A_{mx}}{\sqrt{2}}$

$$\delta = 6,7396 * 10^{-4}$$

Aufgabe 3

Aus der Abbildung 3 (Resonanzkurve) lassen sich qualitative Aussagen über die Phasenverschiebung gewinnen.

Es lassen sich 3 verschiedene Zustände unterscheiden:

- a) Für $\Omega < \omega_0$ ist die Phasenverschiebung nahe 0
- b) Für $\Omega = \omega_0$ ist ein Phasensprung
- c) Für $\Omega > \omega_0$ ist die Phasenverschiebung nahe π

Aufgabe 4:

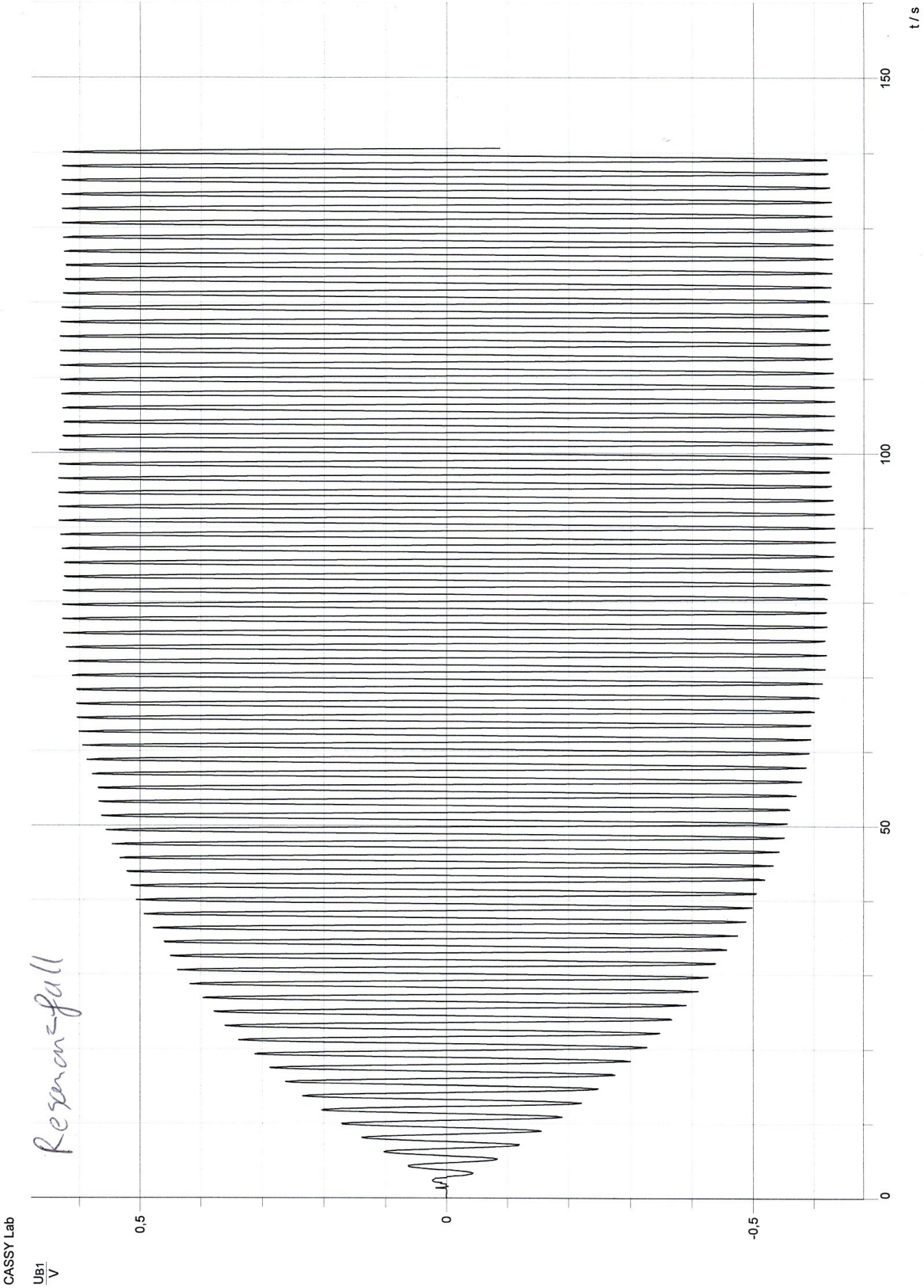


Abbildung 4: Konstant anwachsende Amplitude im Resonanzfall

Im Resonanzfall wächst die Amplitude konstant mit zunehmender Zeit, dies lässt sich in der Grafik sehr gut erkennen. Da die Schwingung gedämpft ist, bleibt die Amplitude nach einem Einschwingvorgang konstant. Ansonsten käme es zur sogenannten Resonanzkatastrophe.

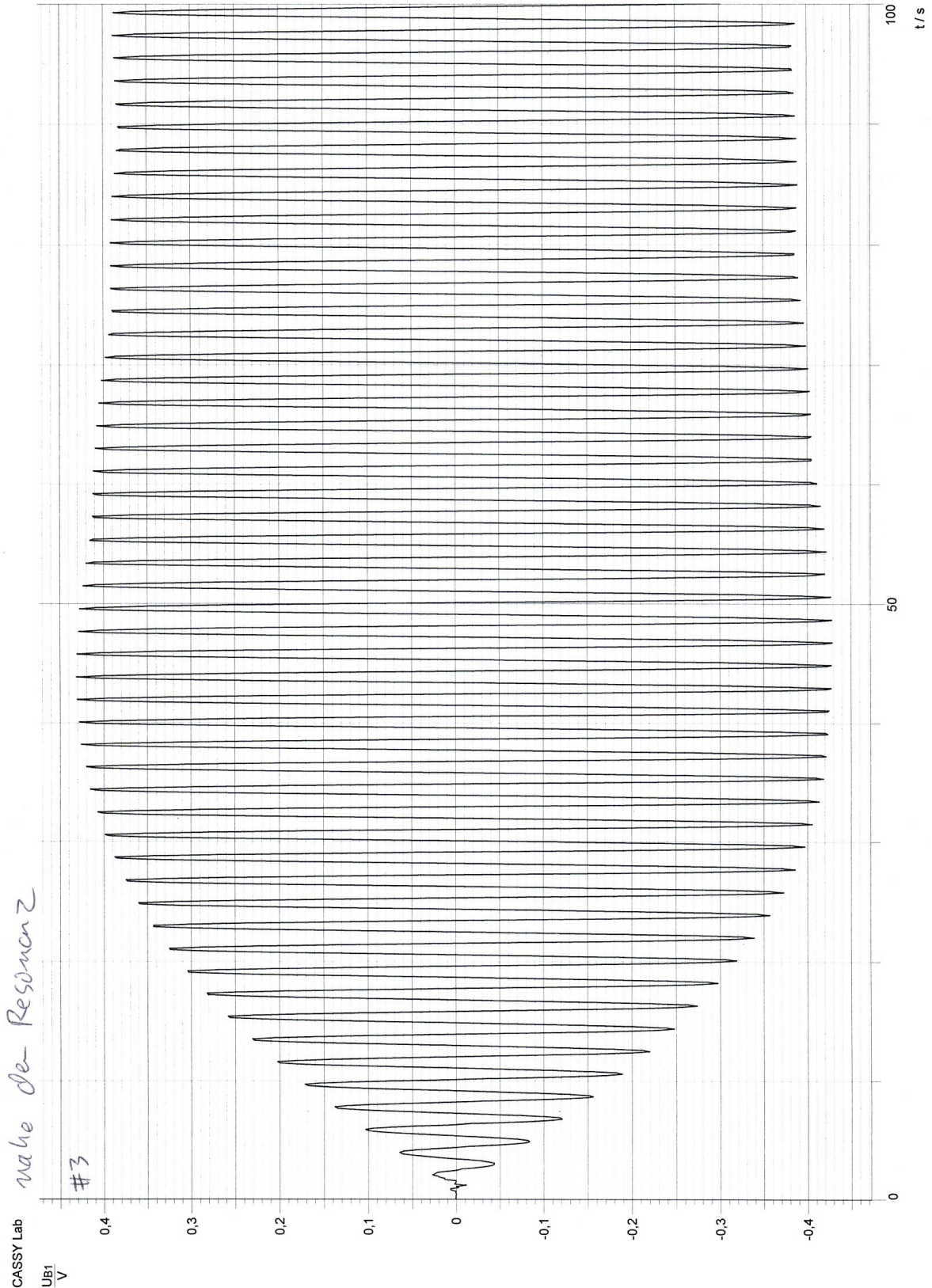


Abbildung 5: Schnelle Zunahme der Amplitude nahe der Resonanz

In der Nähe der Resonanz erkennt man eine sehr schnelle Zunahme der Amplitude, die dann eben so schnell wieder abklingt. Es kommt zu einer Schwebung, die dann abklingt. Nachdem der Einschwingvorgang beendet ist, stellt sich auch hier eine konstante Amplitude ein.

Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Aufgabe 1:

Die Messungen für die Dämpfungsstufen 2 und 3 ergaben:

$$\delta_2 = (-0,021 \pm 0,001) \frac{1}{s}$$

$$\delta_3 = (-0,100 \pm 0,007) \frac{1}{s}$$

Wobei die Eigenfrequenzen bei:

$$\omega_1 = (3,55 \pm 0,01) \frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = (3,63 \pm 0,01) \frac{1}{s}$$

Aufgabe 2:

Anhand der erstellten Resonanzkurve (Abbildung 3) könnte die Dämpfungskonstante als _____ festgelegt werden.

Der Fehler wurde abgeschätzt auf _____. Das daher, da der Wert aus der Grafik abgelesen wurde und somit ein Ablesefehler zustande kommt.

Aufgabe 3:

Durch Betrachten der Resonanzkurve, kann man Aussagen über die Phasenverschiebung treffen.

Somit:

a) Für $\Omega < \omega_0$ ist die Phasenverschiebung nahe 0

b) Für $\Omega = \omega_0$ ist ein Phasensprung

c) Für $\Omega > \omega_0$ ist die Phasenverschiebung nahe π

Aufgabe 4:

Anhand der eingefügten Grafiken aus CASSYLAB ist gut zusehen, dass im Resonanzfall (Abbildung 4) die Amplitude im Einschwingvorgang stark und schnell zunimmt und dann durch die Dämpfung konstant bleibt. Sie fällt nicht mehr ab und bleibt bei der entstandenen Amplitude.

Abbildung 5 zeigt die Zunahme der Amplitude im Falle nahe der Resonanz. Hier ist gut zu sehen, dass wie im Resonanzfall die Amplitude schnell zunimmt, aber dann nicht konstant bleibt, sondern wieder abfällt, da die Resonanz nicht genau genug getroffen wurde.

	n	t_0	t_m	$\delta \tau$	A	$\delta \tau$	$\delta \tau$	Phase
						0,0035		
#1	10	86,1	115,0	0,1	0,021	0,0035		
#2	10	76,1	89,8	0,1	0,21	0,005		$-\phi$
#3	10	70,6	89,8	0,1	0,398	0,005		ca. $-\frac{\phi}{2}$
#4	7	1,6	15,3	0,1	0,204	0,005		ca. $-\frac{\phi}{2}$
#5	10	101,2	119,9	0,1	0,167	0,002		π
#6	10	101,7	119,5	0,1	0,115	0,001		
#7	10	150,4	168,3	0,1	0,135	0,001		
#8	10	151,7	169,8	0,1	0,168	0,005		
#9	10	100,7	119	0,1	0,212	0,008		
#10	10	91,4	110,8	0,1	0,244	0,006		
#11	10	100,3	119,3	0,1	0,620	0,004		

Resonanzfall

